

8

付章

本章の目的は大きく2つある。1つは本書で用いられた線形代数学や解析学に関する補助的結果の紹介である。もう1つは微分方程式論の基礎をなす初期値問題の解の存在・一意性等を厳密に議論することである。なお、前者については詳細な証明等は多くの場合省かれているので読者自身で関連図書を開き確認することを勧める。

8.1 行列の標準形について

第4章、7章では行列の対角化等が用いられた。これに関する事項をここにまとめておく。

実数を成分とする行列（実行列という） A が与えられたとき、正則行列 P をうまく選んで $P^{-1}AP$ が出来るだけ扱い易い形に変形することを一般に行列の標準化という。代表的なものは次の対角化であろう：

定理 8.1. n 次実行列 A が相異なる n 個の固有値 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を持つとき、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & O \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

となる正則行列 P が存在する。

固有値に重解となるものが存在する場合には一般には対角化が出来なくなる：

定理 8.2. n 次実行列 A の相異なる固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, (1 \leq k \leq n)$ とする。このとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} J_1 & & O \\ & J_2 & \\ & & \ddots \\ O & & & J_r \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

となる正則行列 P が存在する；但しここにおいて各 $J_i (1 \leq i \leq r)$ は

$$J_i = \begin{pmatrix} \beta_i & 1 & & O \\ & \beta_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \beta_i & 1 \\ O & & & & \beta_i \end{pmatrix}$$

の形の正方行列で β_i はある固有値 $\alpha_j (1 \leq j \leq k)$ と一致する。

定理 8.2 の (8.1) の形の標準形を A の Jordan 標準形とよぶ。Jordan 標準形は特別な場合として対角行列を含んでいる。(よって固有値に重解が存在しても対角化できる場合もある。) 具体的な Jordan 標準形の求め方等は線形代数学の成書等を参考にして欲しい。

線形代数学の授業で学んだように実行列の固有値は虚数になる場合もある；従って、上記定理 8.1, 8.2 における行列 P も成分に虚数を持つことがある。そこで虚数の使用を避けるため“実行列のみを用いた実行列の標準化”が用いられる場合もある。ここでは第 7 章で用いられた 2 次行列のときのみ考えてみよう。

定理 8.3. A を 2 次実行列とし、その(すべての)固有値を $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ とする。

(1) $\alpha, \beta \in \mathbf{R}; \alpha \neq \beta$ のとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

となる実正則行列 P が存在する。

(2) $\alpha = \beta \in \mathbf{R}$ のときは $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ であるか、または

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

となる実正則行列 P が存在する.

(3) $\alpha = \mu + \nu i, \beta = \mu - \nu i$ ($\mu, \nu \in \mathbf{R}, \nu \neq 0$) のとき

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

となる実正則行列 P が存在する.

証明. (1) は対角化できる場合である. (2) は定理 8.2 で述べた Jordan 標準形が現れる場合である. (3) のみを示そう.

固有値 α に対する (虚数を成分とする) 固有ベクトルを $\mathbf{p} + i\mathbf{q}$ ($\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^2, \mathbf{q} \neq \mathbf{0}$) とおく:

$$A(\mathbf{p} + i\mathbf{q}) = (\mu + \nu i)(\mathbf{p} + i\mathbf{q}).$$

A が実行列であることに注意してこの両辺の実部と虚部を取り出すと

$$A\mathbf{p} = \mu\mathbf{p} - \nu\mathbf{q}, \quad A\mathbf{q} = \nu\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}.$$

よって $P = (\mathbf{p} \ \mathbf{q})$ という 2 次行列に対して

$$AP = (A\mathbf{p} \ A\mathbf{q}) = P \begin{pmatrix} \mu & \nu \\ -\nu & \mu \end{pmatrix} \quad (8.3)$$

である. 一方, A が実行列なのでもうひとつの固有値 β に対する固有ベクトルとして $\mathbf{p} - i\mathbf{q}$ を取ることができる. $\alpha \neq \beta$ なので $\mathbf{p} + i\mathbf{q}, \mathbf{p} - i\mathbf{q}$ は \mathbf{C}^2 のベクトルとして一次独立である; つまり $\det(\mathbf{p} + i\mathbf{q}, \mathbf{p} - i\mathbf{q}) \neq 0$. 行列式の性質により $0 \neq \det(\mathbf{p} + i\mathbf{q}, \mathbf{p} - i\mathbf{q}) = -2i \det(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ なので \mathbf{p}, \mathbf{q} も \mathbf{R}^2 のベクトルとして一次独立である. よって P は正則となり (8.3) より (8.2) を得る. \square

8.2 関数列と関数項級数について

本節では第 5 章等で用いられたべき級数を含む一般の関数列・関数項級数について概説する.

区間 I で定義される関数 $f(x)$ を考える。このとき

$$\text{すべての } x \in I \text{ に対して } f(x) \leq M \tag{8.4}$$

となる実数 M を f の I 上の上界という。 I 上の上界を持つ関数は I 上で上に有界といわれる。条件 (8.4) の不等号の向きを変えて“下界”や“下に有界”という概念も定義される。上に有界かつ下にも有界な関数は単に有界といわれる。

区間 I 上で上に有界な関数 $f(x)$ に対して“最小の上界”，すなわち，条件 (8.4) を満たす実数の中で最小のものが存在する。(実数の性質から証明できる。) それを $f(x)$ の I 上の上限 (supremum) とよび，

$$\sup_I f(x), \quad \sup_I f, \quad \sup_{x \in I} f(x)$$

などと表記する。例えば，

$$\sup_{[0,2]} x^2 = 4, \quad \sup_{[0,2]} x^2 = 4, \quad \sup_{\mathbf{R}} \arctan x = \pi/2$$

である。この例からも分かるように一般に最大値をとる関数に対しては上限と最大値は一致する。最大値を取らない関数に対して，上限はその“代用”とみなすことが出来よう。

区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ を考える。各 $x \in I$ に対して極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ が存在するとき，この $f(x)$ を関数列 $\{f_n(x)\}$ の極限関数とよぶ。ここで次の概念を導入しよう：

定義 8.1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_I |f_n - f| \right) = 0$$

のとき関数列 $\{f_n(x)\}$ は $f(x)$ に I 上で一様収束するという。

単に $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ となるだけでは“収束のスピード”が各 x ごとに異なる可能性があるが，この収束が一様収束ならば，点 x によらず同じようなスピードで $f_n(x)$ が $f(x)$ に収束する。

例 8.1. (1) $[0, 1]$ 上で $f_n(x) = x^2 + (x/n)$ を考えよう。 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^2$ であり， $\sup_{[0,1]} |f_n(x) - x^2| = 1/n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ 。よって $f_n(x)$ は I 上で x^2 に一様収束する。

(2) $[0, 1]$ 上で $f_n(x) = x^n$ を考えよう。容易に分かるように $f(x) = 0 (0 \leq x < 1)$, $f(1) = 1$ ，となる関数 $f(x)$ が $\{f_n(x)\}$ の極限関数である。

しかし、この収束は一様収束ではない。実際、一様収束だとすると、任意の $n \geq 1$ に対して

$$|f_n(1 - 1/n) - f(1 - 1/n)| \leq \sup_{[0,1]} |f_n - f|$$

である。 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{[0,1]} |f_n - f|) = 0$ なので自動的に $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(1 - 1/n) - f(1 - 1/n)| = 0$; つまり $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 1/n)^n = 0$ となるはずである。しかし、一方ではこの極限値は e^{-1} のはずなので矛盾が生じる。

極限関数が具体的に求まらなくても次の定理により一様収束性を判定することが出来る

定理 8.4. 区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ がある関数に I 上で一様収束するための必要十分条件は次である：

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left(\sup_I |f_n - f_m| \right) = 0.$$

一様収束の概念が重要視される理由のひとつは次の定理にある：

定理 8.5. 区間 I 上の連続関数からなる関数列 $\{f_n(x)\}$ がある関数に I 上で一様収束するならば極限関数は I 上で連続である。

例 8.2. 例 8.1(1) の極限関数は連続関数である；実際この収束は一様収束であった。一方 (2) の収束は一様ではなかった。そして、極限関数は不連続である。

区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$$

とおこう。そして

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$$

と定義する。もちろん、この極限関数が存在する場合にこれを考えることにする。

定義 8.2. 関数列 $\{S_n(x)\}$; すなわち関数列 $\{\sum_{k=0}^n f_k(x)\}$ が I 上で一様収束するとき、関数項級数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ は I 上で一様収束するという。

次の定理は定理 8.4, 8.5 を関数項級数に適用したものである：

定理 8.6. 区間 I 上の関数項級数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ がある関数に I 上で一様収束する必要十分条件は次である：

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left(\sup_I \left| \sum_{k=n}^m f_k \right| \right) = 0.$$

定理 8.7. 区間 I 上の連続関数からなる関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ が I 上で一様収束すればその総和も区間 I 上の連続関数になる。

関数項級数が一様収束するための十分条件を与える次の定理は有名有力である：

定理 8.8 (Weierstrass (ワイエルシュトラス) のM判定法；または優級数定理). 区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して，次の2条件

$$x \in I, k \geq 0 \text{ に対して } |f_k(x)| \leq a_k; \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$$

を満たす数列 $\{a_k\}$ が存在すれば関数項級数 $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ は I 上で一様収束する。

例 8.3. (1) べき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ は収束円の内部の閉区間では一様収束する。

実際，このべき級数の収束半径を $R (0 < R \leq \infty)$ としよう． $0 < R_1 < R_2 < R$ となる実数 R_1, R_2 を任意に取ってくる． $\sum_{k=0}^{\infty} a_k R_2^k$ が収束するので，この級数の一般項は $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k R_2^k = 0$ ；よって，正定数 M を十分大きく取れば $k \geq 0$ に対して $|a_k R_2^k| \leq M$ となる．すると $|x| \leq R_1$ のとき，

$$|a_k x^k| = |a_k R_2^k| \cdot \left| \frac{x^k}{R_2^k} \right| \leq M \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^k$$

となり， $R_1/R_2 < 1$ なので， $\sum_{k=0}^{\infty} (R_1/R_2)^k < \infty$ ．Weierstrass のM判定法 (定理 8.8) によりこのべき級数は区間 $[-R_1, R_1]$ で一様収束する。

(2) $x \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2, \dots$ ，に対して $|(\sin nx)/n^2| \leq 1/n^2$ かつ $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < \infty$ なので関数項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin nx)/n^2$ は \mathbf{R} 上で一様収束する。

次の定理から分かるように一様収束性は微分演算や積分演算との相性が大変よい：

定理 8.9. $\{f_n(x)\}$ を区間 $[a, b]$ 上の連続関数からなる関数列とする。

(1) $\{f_n(x)\}$ が $[a, b]$ 上で一様収束すれば $x \in [a, b]$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt = \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt.$$

(2) (項別積分定理) 関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が $[a, b]$ 上で一様収束すれば $x \in [a, b]$ に対して

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x f_n(t) dt.$$

定理 8.10. $\{f_n(x)\}$ を区間 I 上の C^1 -級関数 (連続微分可能な関数) からなる関数列とする.

(1) $\{f_n(x)\}$ が収束し $\{f'_n(x)\}$ が I 上で一様収束すれば

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x).$$

(2) (項別微分定理) 関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が $[a, b]$ 上で収束し, 関数項級数 $\sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x)$ が $[a, b]$ 上で一様収束すれば

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} f'_n(x).$$

例 8.4. 収束半径 R ($0 < R \leq \infty$) であるべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対して, べき級数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ の収束半径も同じ R であることが知られている. そして, べき級数は収束円の内部の閉区間では一様収束している (例 8.3(1)). よって第 5 章で多用した $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ という計算は項別微分定理により正当化される.

8.3 初期値問題の解の存在と一意性について

微分方程式の基本的な問題として “具体的に解を明示できない微分方程式に解はあるのか?” というものがある. 結論から書くと, 常に解は存在する. 本節ではこれを厳密に証明しよう. 但し, 全く一般の方程式に対する証明は煩雑になるのでここではまず基本的な一階微分方程式の初期値問題の解の存在等を示すことにする.

xy -平面上の部分集合 D (境界を含む長方形) を

$$D = \{(x, y) \mid x_0 \leq x \leq x_0 + \delta, \quad |y - y_0| \leq \rho\} \quad (8.5)$$

と定義する. $f(x, y)$ を D で定義された関数として, 次の初期値問題を考え

よう :

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (8.6)$$

以下を仮定する :

(A-1) $f(x, y)$ は D で連続 ;

(A-2) D において $|f(x, y)| \leq M$ ($M \geq 0$ はある定数) ;

(A-3) 次のような正定数 L が存在する : 任意の $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ に対して

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \quad (8.7)$$

が成立する.

定理 8.11. 上記の仮定の下で $\delta' = \min \{\delta, \rho/M\}$ とおこう. このとき初期値問題 (8.6) は少なくとも $[x_0, x_0 + \delta']$ 上では解を持つ.

定理 8.12. 上記の仮定の下で, 初期値問題 (8.6) の解は存在すれば唯ひとつである.

系 8.1. 上記の仮定の下で初期値問題 (8.6) は $[x_0, x_0 + \delta']$ 上で唯ひとつの解を持つ.

条件 (A-3) が成立するとき, “関数 $f(x, y)$ は D において y について Lipschitz (リブシッツ) 条件を満たす” といわれる. この条件は確認し難いように見えるが, $f(x, y)$ が D で C^1 -級ならば自動的に成立することが示せる. 実際, $L = \max_D |f_y(x, y)|$ とおこう. 任意の $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ をとると, (y に関する 1 変数関数の) 平均値定理から y_1 と y_2 の間のある数 \tilde{y} を用いて

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f_y(x, \tilde{y})(y_2 - y_1)| \leq L|y_1 - y_2|$$

となり (8.7) を得る.

補題 8.1. C^1 -級関数 $y(x)$ が初期値問題 (8.6) の解になる必要十分条件は $y(x)$ が次の積分方程式を満たすことである :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (8.8)$$

証明. 初期値問題 (8.6) の C^1 -級な解 $y(x)$ が存在するとしよう. (8.6) の方程式の両辺を $[x_0, x]$ 上で積分して初期条件を用いれば (8.7) を得る. 逆に (8.7) を満たす $y(x)$ が存在する場合, これの両辺を微分して方程式を満たすことがすぐ分かる. また, 明らかに $y(x_0) = y_0$ である. \square

定理 8.11 の証明. $[x_0, x_0 + \delta']$ 上の関数列 $\{y_n(x)\}$ を以下で帰納的に定義する:

$$y_0(x) \equiv y_0;$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t))dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

この関数列が一様収束極限を持ち、その極限関数がまさしく積分方程式 (8.8) の (従って初期値問題 (8.6) の) 解となることを以下で示そう。

(i) 関数列 $\{y_n(x)\}$ が確かに区間 $[x_0, x_0 + \delta']$ 上で定義されて行くことを先ず示そう。つまり $[x_0, x_0 + \delta']$ 上で各点 $(t, y_n(t))$ が関数 $f(x, y)$ の定義域の属することを示そう。そのために $|y_n(x) - y_0| \leq \rho$ が成立することを帰納的に示せばよい。 $n = 0$ のときこの不等式は確かに成立している。ある番号 n まで成立するならば

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n(t))dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t))|dt \\ &\leq M(x - x_0) \leq M\delta' \leq M(\rho/M) = \rho. \end{aligned}$$

よって、 $n + 1$ のときも成立する。

(ii) $[x_0, x_0 + \delta']$ 上で不等式

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{ML^{n-1}}{n!} (x - x_0)^n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.10)$$

が成立することを帰納法で示す。 $n = 1$ のときは

$$|y_1(x) - y_0(x)| = |y_1(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)|dt \leq M(x - x_0)$$

となり確かに成立している。ある n まで (8.10) が成立するならば Lipschitz 条件 (A-3) を用いて

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))|dt \leq L \int_{x_0}^x |y_n(t) - y_{n-1}(t)|dt.$$

よって帰納法の仮定を用いて

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq L \frac{ML^{n-1}}{n!} \int_{x_0}^x (t - x_0)^n ds = \frac{ML^n}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

となり $n + 1$ のときも成立する。

(iii) 関数列 $\{y_n(x)\}$ が $[x_0, x_0 + \delta']$ 上で一様収束することを示そう。

$$y_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^n [y_k(x) - y_{k-1}(x)]$$

より $\{y_n(x)\}$ が $[x_0, x_0 + \delta']$ 上で一様収束する必要十分条件は関数項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} [y_k(x) - y_{k-1}(x)]$ が $[x_0, x_0 + \delta']$ 上で一様収束することである。(ii)の結果により $|y_k(x) - y_{k-1}(x)| \leq (ML^{k-1}/k!)(\delta')^k$ かつ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{ML^{k-1}}{k!} (\delta')^k = \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(L\delta')^k}{k!} = \frac{M}{L} (e^{L\delta'} - 1)$$

なので Weierstrass の M 判定法 (定理 8.8) により $\{y_n(x)\}$ は $[x_0, x_0 + \delta']$ 上である連続関数 $\tilde{y}(x)$ に一様収束する:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{[x_0, x_0 + \delta']} |y_n - \tilde{y}| \right) = 0. \quad (8.11)$$

(iv) $\tilde{y}(x)$ が積分方程式 (8.8) を満たすことを示す. 関数列 $\{y_n(x)\}$ の定義式 (8.9) で $n \rightarrow \infty$ として

$$\tilde{y}(x) = y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt,$$

である. そして $\{f_n(t, y_n(t))\}$ は $f(t, \tilde{y}(t))$ に $[x_0, x_0 + \delta']$ 上で一様収束することが示せる. 実際, Lipschitz 条件と (8.11) により

$$\begin{aligned} |f_n(t, y_n(t)) - f_n(t, \tilde{y}(t))| &\leq L |y_n(t) - \tilde{y}(t)| \\ &\leq L \max_{[x_0, x_0 + \delta']} |y_n - \tilde{y}| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となる. よって, 定理 8.9(1) より

$$\tilde{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_{n-1}(t)) dt = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \tilde{y}(t)) dt$$

となり, $\tilde{y}(x)$ は積分方程式 (8.8) の解と分かる. \square

注意 8.1. (1) 上記の定理で保証された (8.6) の解の存在域 $[x_0, x_0 + \delta']$ はとても小さいように見えるかもしれない. しかし, 今まで具体的に方程式を解いて分かるように解が存在する範囲はもっと広く取れるのが通常のことである. 実際, $x = x_0 + \delta'$ まで解 $y(x)$ は存在するので, $y(x_0 + \delta') = \tilde{y}_0$ と置いて同じ方程式の新たな初期値を持つ初期値問題

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0 + \delta') = \tilde{y}_0 \end{cases}$$

を考えよう. 上記定理を再度用いれば (適当な仮定が満たされることは必要だが) 十分小さな $\delta'' > 0$ に対して, この初期値問題は少なくとも区間 $[x_0 + \delta', x_0 + \delta' + \delta'']$ 上で解を持つことが示せるであろう. よって, もと

もとの初期値問題 (8.6) の解の存在域が $[x_0, x_0 + \delta' + \delta'']$ まで広がったことになる。

- (2) しかし、微分方程式の解の存在域は限りなく広げられるわけではない。例えば $c > 0$ を定数として初期値問題

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1/c \end{cases}$$

を考えてみよう。これは変数分離形なので容易に解けて一意的な解は $y(x) = 1/(c-x)$ と分かる。 $\lim_{x \rightarrow c-0} y(x) = +\infty$ なので、 $x = 0$ から右側への解の存在域は最大でも区間 $[0, c)$ である。

- (3) この定理では x_0 から右側への解の存在を示したが、同様に x_0 から左側への解の存在を示すことも出来る。

初期値問題の解の一意性を示すために、著名かつ有用な次の補題を先ず準備しよう：

補題 8.2 (Gronwall (グロンウォール) の補題). $z(x), g(x)$ は区間 $[x_0, x_1]$ 上の連続関数で、 $[x_0, x_1]$ 上で $g(x) \geq 0$ とする。 $c \geq 0$ を定数とする。このとき $z(t)$ が積分不等式

$$z(x) \leq c + \int_{x_0}^x g(t)z(t)dt, \quad x_0 \leq x \leq x_1 \quad (8.12)$$

満たせば $z(x)$ は

$$z(x) \leq c \exp\left(\int_{x_0}^x g(t)dt\right), \quad x_0 \leq x \leq x_1 \quad (8.13)$$

という評価式をみたとす。

証明. 不等式 (8.12) の右辺を $U(x)$ とおこう；つまり

$$U(x_0) = c, \quad \text{かつ} \quad z(x) \leq U(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

となる。よって、 $g(x) \geq 0$ なことにより

$$U'(x) = g(x)z(x) \leq g(x)U(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

となり

$$U'(x) - g(x)U(x) \leq 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1; \quad \text{つまり} \quad \left[U(x) \exp\left(-\int_{x_0}^x g(t)dt\right) \right]' \leq 0,$$

を得る. これを $[x_0, x]$ 上積分して

$$U(x) \exp\left(-\int_{x_0}^x g(t)dt\right) - c \leq 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

すなわち

$$U(x) \leq c \exp\left(\int_{x_0}^x g(t)dt\right), \quad x_0 \leq x \leq x_1,$$

である. $U(x)$ の定義より $z(x) \leq U(x)$ なので (8.13) を得る. \square

定理 8.12 の証明. 初期値問題 (8.6) の $[x_0, x_1]$ ($x_1 \leq x_0 + \delta$) 上の 2 つの解を $y_1(x), y_2(x)$ とする. $y_1 \equiv y_2$ を示せばよい. 補題 8.1 により

$$y_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_i(t))dt, \quad i = 1, 2,$$

である. よって

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq \left| \int_{x_0}^x \{f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\}dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))|dt.$$

Lipschitz 条件 (A-3) を用いて

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq 0 + L \int_{x_0}^x |y_1(t) - y_2(t)|dt, \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

Gronwall の補題 (補題 8.2) により

$$|y_1(x) - y_2(x)| \leq 0 \cdot \exp\left(\int_{x_0}^x Ldt\right) \equiv 0, \quad x_0 \leq x \leq x_1.$$

ゆえに $y_1(x) \equiv y_2(x)$ となり, 解は唯一つとなる. \square

初期値問題の解の一意性は無条件では成立しない. 例えば, 次の初期値問題を考えよう:

$$\begin{cases} y' = \frac{3}{2}y^{1/3}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

この方程式は少なくとも 2 つの解 $y(x) \equiv 0$ と $y(x) = x^{3/2}$ を持つことが確かめられる. 実は $c \geq 0$ を任意定数として

$$y_c(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq c; \\ (x - c)^{3/2}, & x \geq c, \end{cases}$$

で与えられる関数はすべてこの初期値問題の解となる. (読者は確認せよ.) この方程式の右辺の関数 $\frac{3}{2}y^{1/3}$ は定理 8.12 の仮定にある Lipschitz 条件を満たさ

ないことに注意せよ。(章末問題 5, 6 参照.)

今度は連立線形方程式の解の存在定理を簡単に紹介しておこう。上述の定理 8.12 では一般に解の存在域は小さくなってしまいう可能性があった。しかし、線形方程式ではそういうことはない。ここでは次の 1 階 2 連立線形系の初期値問題を考えることにする：

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x)z + f(x), \\ z' = c(x)y + d(x)z + g(x), \\ y(x_0) = y_0, \quad z(x_0) = z_0. \end{cases} \quad (8.14)$$

係数関数 $a(x), b(x), c(x), d(x)$ および非斉次項 $f(x), g(x)$ はすべて区間 $[x_0, x_0 + \delta]$ で連続で、ある定数 $M > 0$ に対して $|a(x)|, |b(x)|, |c(x)|, |d(x)|, |f(x)|, |g(x)| \leq M$ を満たすと仮定する。次が証明できる：

定理 8.13. 初期値問題 (8.14) は区間 $[x_0, x_0 + \delta]$ 上で唯一ひとつの解を持つ。

注意 8.2. この定理から自動的に 2 階線形方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \end{cases} \quad (8.15)$$

の一意解の存在定理が得られる。実際 $z = y'$ とおくと初期値問題 (8.15) は y, z に関する (8.14) の形の連立方程式の初期値問題に書き換えることが出来る。(読者は確認せよ.)

定理 8.13 の証明。概略のみを示すことにする。

初期値問題 (8.6) と同様に初期値問題 (8.14) も次の連立の積分方程式に帰着される：

$$\begin{cases} y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \{a(t)y(t) + b(t)z(t) + f(t)\} dt, \\ z(x) = z_0 + \int_{x_0}^x \{c(t)y(t) + d(t)z(t) + g(t)\} dt. \end{cases} \quad (8.16)$$

先ず解の存在を示す。 $[x_0, x_0 + \delta]$ 上の関数列 $\{y_n(x)\}, \{z_n(x)\}$ を以下で帰納的に定義していこう：

$$\begin{aligned} & y_0(x) \equiv y_0, \quad z_0(x) \equiv z_0, \\ & \begin{cases} y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \{a(t)y_n(t) + b(t)z_n(t) + f(t)\} dt, \\ z_{n+1}(x) = z_0 + \int_{x_0}^x \{c(t)y_n(t) + d(t)z_n(t) + g(t)\} dt. \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

このとき、次の評価式を帰納的に証明することが出来る： $n = 1, 2, \dots$ ，に対して

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{2^{n-1}M^n}{n!} (|y_0| + |z_0| + 1)(x - x_0)^n,$$

$$|z_n(x) - z_{n-1}(x)| \leq \frac{2^{n-1}M^n}{n!} (|y_0| + |z_0| + 1)(x - x_0)^n.$$

これを用いて、定理 8.11 の証明と同様に考察していけば $\{y_n(x)\}, \{z_n(x)\}$ が各々 $[x_0, x_0 + \delta]$ 上のある連続関数 $\tilde{y}(x), \tilde{z}(x)$ に一様収束することが分かる。この $(\tilde{y}(x), \tilde{z}(x))$ が積分方程式 (8.16) の解になる。

次に解の一意性を示そう。初期値問題 (8.14) の $[x_0, x_0 + \delta]$ 上の 2 つの解を $(y_1(x), z_1(x)), (y_2(x), z_2(x))$ と置く。

$$\begin{cases} y_i(x) = y_0 + \int_{x_0}^x \{a(t)y_i(t) + b(t)z_i(t) + f(t)\} dt, \\ z_i(x) = z_0 + \int_{x_0}^x \{c(t)y_i(t) + d(t)z_i(t) + g(t)\} dt, \quad i = 1, 2, \end{cases}$$

である。よって係数関数に関する仮定から

$$\begin{cases} |y_1(x) - y_2(x)| \leq M \int_{x_0}^x (|y_1(t) - y_2(t)| + |z_1(t) - z_2(t)|) dt, \\ |z_1(x) - z_2(x)| \leq M \int_{x_0}^x (|y_1(t) - y_2(t)| + |z_1(t) - z_2(t)|) dt \end{cases}$$

を得る。辺々を加えて

$$|y_1(x) - y_2(x)| + |z_1(x) - z_2(x)| \leq 2M \int_{x_0}^x (|y_1(t) - y_2(t)| + |z_1(t) - z_2(t)|) dt.$$

これに Gronwall の補題 (補題 8.2) を適応して $[x_0, x_0 + \delta]$ 上で $|y_1(x) - y_2(x)| + |z_1(x) - z_2(x)| \equiv 0$ を得る。つまり $(y_1(x), z_1(x)) \equiv (y_2(x), z_2(x))$ となり解は唯一ひとつとなる。□

8.4 初期値問題の解の初期値とパラメータに関する連続性

工学や物理学において同一実験を繰り返し行う場合、注意深く準備をしたとしても、“初期の状態”や“実験機材等のもつパラメータ値”は実験ごとに微妙に異なるであろう。しかし、十分確立した理論が知られている場合、その実験ではこれらの多少の誤差が実験結果に大きな誤差を与えることは無い。これを微分方程式の立場から眺めてみよう。

ひとつの単純な例として空気抵抗を伴う落体の運動を考えよう。時刻 0 のときに初速度 v_0 で鉛直下方に投げた重さ m の質点の時刻 t における鉛直下向きの速さ $v(t)$ は通常の単位系で次の微分方程式の初期値問題の解である：

$$m \frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad v(0) = v_0 \quad (g: \text{重力加速度})$$

ここにおいて定数 $k > 0$ は空気抵抗等を表す定数である。これの解は

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

である。確かに、解は v_0, m, k といった初期値やパラメータに対しても連続関数となっている。

上記の考察結果を一般の方程式に対して保証するのが本節の定理である。

xy -平面上の集合 D を前節 (8.5) のように定義し、 $f(x, y)$ を D 上で定義された関数で前節の仮定 (A-1), (A-2), (A-3) を満たすとする。 α を y_0 に十分近い実数とすると、前節で示したように初期値問題

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = \alpha. \end{cases} \quad (8.17)$$

が x_0 の近くで一意的な解を持つことが分かる。その解を $y(x, \alpha)$ と書こう。このとき次が成立する：

定理 8.14. 初期値問題 (8.17) の解 $y(x, \alpha)$ は 2 変数 (x, α) の関数として連続関数になる。

証明. $\alpha, \tilde{\alpha}$ を y_0 に十分近い実数として $(x, \alpha) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ のとき $y(x, \alpha) \rightarrow y(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ を示そう。補題 8.1 により

$$y(x, \alpha) = \alpha + \int_{x_0}^x f(t, y(t, \alpha)) dt$$

である。もちろん $y(x, \tilde{\alpha})$ も同様の積分方程式を満たしている。さて

$$|y(x, \alpha) - y(\tilde{x}, \tilde{\alpha})| \leq |y(x, \alpha) - y(x, \tilde{\alpha})| + |y(x, \tilde{\alpha}) - y(\tilde{x}, \tilde{\alpha})| \quad (8.18)$$

と分解しよう。右辺の第 2 項については微分方程式より

$$\begin{aligned} |y(x, \tilde{\alpha}) - y(\tilde{x}, \tilde{\alpha})| &= \left| \int_{\tilde{x}}^x y'(t, \tilde{\alpha}) dt \right| \\ &= \left| \int_{\tilde{x}}^x f(t, y(t, \tilde{\alpha})) dt \right| \leq \left| \int_{\tilde{x}}^x M dt \right| \leq M|x - \tilde{x}| \end{aligned}$$

と評価できる。一方、第 1 項は積分方程式より

$$|y(x, \alpha) - y(x, \tilde{\alpha})| \leq |\alpha - \tilde{\alpha}| + \int_{x_0}^x |f(t, y(t, \alpha)) - f(t, y(t, \tilde{\alpha}))| dt$$

なので, Lipschitz 条件 (A-3) より

$$|y(x, \alpha) - y(x, \tilde{\alpha})| \leq |\alpha - \tilde{\alpha}| + L \int_{x_0}^x |y(t, \alpha) - y(t, \tilde{\alpha})| dt$$

となり, Gronwall の補題から $|y(x, \alpha) - y(x, \tilde{\alpha})| \leq |\alpha - \tilde{\alpha}| e^{L(x-x_0)}$ を得る. よって (8.18) から

$$|y(x, \alpha) - y(\tilde{x}, \tilde{\alpha})| \leq M|x - \tilde{x}| + |\alpha - \tilde{\alpha}| e^{L(x-x_0)}$$

となり, $(x, \alpha) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ のとき $y(x, \alpha) \rightarrow y(\tilde{x}, \tilde{\alpha})$ となる. □

次にパラメータに関する解の連続性を証明しよう. 一般的状況下でのこの証明には解析学に関する知識がもう少し要求されるので幾らか条件を強めた上で厳密な証明を与えることにする.

xy -平面上の集合 D を前節の (8.5) で定義する. パラメータ λ は区間 $[\lambda_*, \lambda^*]$ の範囲を動くとする. 以下を仮定する:

(B-1) $f(x, y; \lambda)$ は $D \times [\lambda_*, \lambda^*]$ で連続;

(B-2) $D \times [\lambda_*, \lambda^*]$ において $|f(x, y; \lambda)| \leq M$ ($M \geq 0$ はある定数);

(B-3) 次のような正定数 L が存在する: 任意の $(x, y_1, \lambda), (x, y_2, \lambda) \in D \times [\lambda_*, \lambda^*]$ に対して

$$|f(x, y_1; \lambda) - f(x, y_2; \lambda)| \leq L|y_1 - y_2|$$

が成立する;

(B-4) 次のような正定数 Λ が存在する: 任意の $(x, y, \lambda_1), (x, y, \lambda_2) \in D \times [\lambda_*, \lambda^*]$ に対して

$$|f(x, y, \lambda_1) - f(x, y, \lambda_2)| \leq \Lambda|\lambda_1 - \lambda_2|$$

が成立する.

この仮定の下で次のパラメータの付いた初期値問題を考えよう:

$$\begin{cases} y' = f(x, y; \lambda) \\ y(x_0) = \alpha. \end{cases} \quad (8.19)$$

これの一意的な解を $y(x, \alpha; \lambda)$ と書こう; 但し. α は y_0 に十分近い実数とする.

定理 8.15. 初期値問題 (8.19) の解 $y(x, \alpha; \lambda)$ は 3 変数 (x, α, λ) の関数として連続関数になる.

証明. $(x, \alpha, \lambda) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{\alpha}, \tilde{\lambda})$ のとき $y(x, \alpha; \lambda) \rightarrow y(\tilde{x}, \tilde{\alpha}; \tilde{\lambda})$ を示そう. 前定理の証明と同様な考え方で議論をすすめる.

$y(x, \alpha; \lambda)$ は

$$y(x, \alpha; \lambda) = \alpha + \int_{x_0}^x f(t, y(t, \alpha; \lambda); \lambda) dt$$

を満たす. もちろん $y(x, \tilde{\alpha}; \tilde{\lambda})$ も同様の積分方程式を満たしている. そこで

$$\begin{aligned} & |y(x, \alpha; \lambda) - y(\tilde{x}, \tilde{\alpha}; \tilde{\lambda})| \\ & \leq |y(x, \alpha; \lambda) - y(x, \alpha; \tilde{\lambda})| + |y(x, \alpha; \tilde{\lambda}) - y(x, \tilde{\alpha}; \tilde{\lambda})| + |y(x, \tilde{\alpha}; \tilde{\lambda}) - y(\tilde{x}, \tilde{\alpha}; \tilde{\lambda})| \\ & \equiv D_1 + D_2 + D_3 \end{aligned} \quad (8.20)$$

と分けて各項を評価していこう.

D_2, D_3 は前定理の証明と同様にして

$$D_3 \leq M|x - \tilde{x}|, \quad D_2 \leq |\alpha - \tilde{\alpha}|e^{L(x-x_0)}$$

と評価できる. (D_2 の評価式の導出には仮定 (B-3) と Gronwall の補題を用いている.) 一方 D_1 に対しては

$$\begin{aligned} D_1 & \equiv |y(x, \alpha; \lambda) - y(x, \alpha; \tilde{\lambda})| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t, \alpha; \lambda); \lambda) - f(t, y(t, \alpha; \tilde{\lambda}); \tilde{\lambda})| dt \\ & \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t, \alpha; \lambda); \lambda) - f(t, y(t, \alpha; \lambda); \tilde{\lambda})| dt \\ & \quad + \int_{x_0}^x |f(t, y(t, \alpha; \lambda); \tilde{\lambda}) - f(t, y(t, \alpha; \tilde{\lambda}); \tilde{\lambda})| dt \end{aligned}$$

となり, 仮定 (B-3), (B-4) を用いて

$$|y(x, \alpha; \lambda) - y(x, \alpha; \tilde{\lambda})| \leq \Lambda(x_1 - x_0)|\lambda - \tilde{\lambda}| + L \int_{x_0}^x |y(t, \alpha; \lambda) - y(t, \alpha; \tilde{\lambda})| dt$$

を得る. 再び Gronwall の補題により

$$D_1 \equiv |y(x, \alpha; \lambda) - y(x, \alpha; \tilde{\lambda})| \leq \Lambda(x_1 - x_0)|\lambda - \tilde{\lambda}|e^{L(x-x_0)}$$

となるので, (8.20) により

$$\begin{aligned} & |y(x, \alpha; \lambda) - y(\tilde{x}, \tilde{\alpha}; \tilde{\lambda})| \\ & \leq \Lambda(x_1 - x_0)|\lambda - \tilde{\lambda}|e^{L(x-x_0)} + |\alpha - \tilde{\alpha}|e^{L(x-x_0)} + M|x - \tilde{x}| \end{aligned}$$

を得る. よって, $(x, \alpha, \lambda) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{\alpha}, \tilde{\lambda})$ のとき $y(x, \alpha; \lambda) \rightarrow y(\tilde{x}, \tilde{\alpha}; \tilde{\lambda})$ である. \square

8.5 解析的な関数を係数にもつ 2 階線形方程式の解析的な解の存在について

第 5 章では $p(x), q(x)$ を $x = x_0$ で解析的な関数, つまりべき級数展開できる関数として, 2 階線形方程式

$$y'' = p(x)y' + q(x)y, \quad (8.21)$$

がやはり $x = x_0$ で解析的な解を持つ実例を多く学んだ. 本節ではこの事実に対する厳密な証明を与える.

本節では上記の方程式 (8.21) の係数関数は $x = 0$ で解析的で, 係数関数は次のようにべき級数展開 (マクローリン展開) できるとする:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (8.22)$$

定理 8.16. $p(x), q(x)$ が $|x| < R$ でべき級数展開できるならば 2 階線形方程式の初期値問題

$$\begin{cases} y'' = p(x)y' + q(x)y, \\ y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1 \end{cases} \quad (8.23)$$

も $|x| < R$ でべき級数展開できる一意的な解を持つ.

この定理の証明のためにべき級数の収束半径に関する補題を一つ準備する:

補題 8.3. 2 つの数列 $\{b_n\}, \{B_n\}$ に対して

$$|b_n| \leq B_n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{1/n} = 1/R \quad (0 < R < \infty)$$

ならばべき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ は (少なくとも) $|x| < R$ で収束する.

証明. $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n^{1/n} = 1/R$ より, 任意に取ってきた小さな正数 $\rho < R/2$ に対して n が十分大きいとき (それを $n \geq n_0$ とする) $B_n^{1/n} \leq 1/(R - \rho)$ である. よって, 仮定から $n \geq n_0$ のとき $|b_n| \leq 1/(R - \rho)^n$ となる. これより

$$|x| \leq R - 2\rho, \quad n \geq n_0 \text{ のとき } |b_n x^n| \leq \left(\frac{|x|}{R - \rho} \right)^n \leq \left(\frac{R - 2\rho}{R - \rho} \right)^n$$

であり $\sum_{n=n_0}^{\infty} ((R - 2\rho)/(R - \rho))^n < \infty$ なので Weierstrass の M 判定法 (定理 8.8) を用いて $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n x^n$, すなわち $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ は $|x| \leq R - 2\rho$ で (一様) 収束する. $\rho > 0$ は任意に小さく取れるので, 結局 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ は $|x| < R$ で収束することがわかる. \square

定理 8.16 の証明. (i) まず, 解析的な解 $y(x)$ が存在するとして

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (8.24)$$

とおいたとき, 係数 $\{a_n\}$ が一意的に定まることを示そう. (8.24) より

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}x^n, \quad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \quad (8.25)$$

なので方程式 (8.21) に代入して (8.22) を用いれば

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n (k+1)p_{n-k}a_{k+1} \right) x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n q_{n-k}a_k \right) x^n \end{aligned}$$

が成立せねばならないと分かる. 両辺の x^n の係数が等しくなるので $n = 0, 1, 2, \dots$, に対して

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = \sum_{k=0}^n (k+1)p_{n-k}a_{k+1} + \sum_{k=0}^n q_{n-k}a_k.$$

つまり $n = 1, 2, \dots$, に対して

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = q_n a_0 + (n+1)p_0 a_{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \{(k+1)p_{n-k} + q_{n-k-1}\} a_{k+1}. \quad (8.26)$$

初期条件より $a_0 = y_0, a_1 = y_1$ となる. よって, (8.26) を用いれば係数 $\{a_n\}$ が帰納的に定まっていくことが分かる.

(ii) 次に (i) で定めた数列 $\{a_n\}$ を用いたべき級数 (8.24) が $|x| < R$ で収束することを示そう.

$0 < r < R$ となる r を任意に持ってこよう. 級数 $\sum_{n=0}^{\infty} p_n r^n, \sum_{n=0}^{\infty} q_n r^n$ が収束するので, 特に $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n r^n = 0$; よって, $L \geq 1$ を十分大きな正定数とすると

$$|p_n| \leq \frac{L}{r^n}, \quad |q_n| \leq \frac{L}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.27)$$

とできる. $L \geq 1$ は (必要があれば更に大きくして) (8.27) に加えて

$$|a_0| = |y_0| \leq L, \quad |a_1| = |y_1| \leq L$$

も成立するようにしておこう. すると (8.26) から

$$(n+2)(n+1)|a_{n+2}| \leq L^2 r^{-n} + L(n+1)|a_{n+1}| + Lr^{-n} \sum_{k=0}^{n-1} \{(k+1)r^k + r^{k+1}\} |a_{k+1}|,$$

すなわち

$$r^n(n+2)(n+1)|a_{n+2}| \leq L^2 + Lr^n(n+1)|a_{n+1}| + L \sum_{k=0}^{n-1} \{(k+1)r^k + r^{k+1}\} |a_{k+1}|$$

を得る. よって

$$r^n(n+2)(n+1)|a_{n+2}| \leq L^2 + L^2 \sum_{k=0}^n \{(k+1)r^k + r^{k+1}\} |a_{k+1}|. \quad (8.28)$$

これを基にして, べき級数 (8.24) が $x=0$ の近くで収束することを示そう. (8.28) の右辺の数列を $S_n (> 0)$ とおこう. すると

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= L^2 \{(n+2)r^{n+1} + r^{n+2}\} |a_{n+2}| \\ &= L^2 \frac{\{(n+2)r^{n+1} + r^{n+2}\}}{r^n(n+2)(n+1)} \cdot r^n(n+2)(n+1)|a_{n+2}| \leq L^2 r \frac{n+2+r}{(n+2)(n+1)} \cdot S_n. \end{aligned}$$

つまり

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} \leq 1 + L^2 r \frac{n+2+r}{(n+2)(n+1)}.$$

この不等式の右辺は $n \rightarrow \infty$ とすると 1 に収束するので, 任意に持ってきた小さな正数 $\rho > 0$ に対して番号 n が十分大きいと (例えば, $n \geq n_0$) 常に $S_{n+1} \leq (1+\rho)S_n$ となる. よってある正定数 $L_1 > 0$ に対して $n \geq n_0$ のとき $S_n \leq L_1(1+\rho)^n$ となる. (8.28) の右辺が S_n なのでこれより

$$r^n(n+2)(n+1)|a_{n+2}| \leq L_1(1+\rho)^n;$$

つまり $n \geq n_0$ のとき

$$|a_{n+2}| \leq L_1 \left(\frac{1+\rho}{r} \right)^n \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

を得る. よって補題 8.3 により $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < r/(1+\rho)$ で収束する. $\rho > 0$ は任意の数だったので, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < r$ で収束する. 最後に, r も $r < R$ となる任意の数だったことにより $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $|x| < R$ で収束することが分かる.

(iii) 上記のようにして作ったべき級数 $y(x)$ がまさしく求める初期値問題 (8.23) の唯一の解であることを最後に示しておこう. この $y(x)$ は (ii) で示したように $|x| < R$ での解析的な関数である. よって, $y'(x), y''(x)$ は (8.25) で与え

られる。そして、 $\{a_n\}$ の定義から y, y', y'' の展開式を方程式に代入すれば解になることが分かる。□

8.6 第3章の定理 3.1 の線形独立性の証明

第3章では述べられなかった定理 3.1 の線形独立性の証明を本節で与える。以下では（一般には複素数を係数とする）多項式 $p(x) (\neq 0)$ の次数を $\deg p$ で表す。 $p(x) \equiv 0$ のときは $\deg p = -\infty$ と規約する。

補題 8.4. $p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)$ を複素数を係数に持つ m 個の多項式, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ を全て相異なる複素数とする。（つまり $j \neq k$ ならば $\alpha_j \neq \alpha_k$ 。）このとき \mathbf{R} 上で

$$p_1(x)e^{\alpha_1 x} + p_2(x)e^{\alpha_2 x} + \dots + p_m(x)e^{\alpha_m x} \equiv 0 \quad (8.29)$$

ならば $p_k(x) \equiv 0, k = 1, 2, \dots, m,$ である。

証明. 個数 m に関する数学的帰納法で証明する。 $m = 1$ のときの証明は自明であらう。

ある $m - 1$ までこの補題が正しいとして m のときを考える。恒等式 (8.29) より

$$p_1(x)e^{(\alpha_1 - \alpha_m)x} + p_2(x)e^{(\alpha_2 - \alpha_m)x} + \dots + p_{m-1}(x)e^{(\alpha_{m-1} - \alpha_m)x} + p_m(x) \equiv 0 \quad (8.30)$$

である。仮定より (8.30) の左辺に現れる指数関数の指数に対して $j \neq k$ ならば $\alpha_j - \alpha_m \neq \alpha_k - \alpha_m$ であることに注意しよう。

もし $p_m(x) \equiv 0$ ならば帰納法の仮定により $p_k(x) \equiv 0, k = 1, 2, \dots, m - 1,$ も得ることが出来て証明が終わる。そこで、 $p_m(x) \neq 0$ と仮定して矛盾を導こう。 $\deg p_m = \ell \geq 0$ として両辺を $\ell + 1$ 回微分すると Leibniz の公式より

$$\begin{aligned} & \{(\alpha_1 - \alpha_m)^{\ell+1} p_1(x) + \tilde{p}_1(x)\} e^{(\alpha_1 - \alpha_m)x} + \{(\alpha_2 - \alpha_m)^{\ell+1} p_2(x) + \tilde{p}_2(x)\} e^{(\alpha_2 - \alpha_m)x} + \dots \\ & \dots + \{(\alpha_{m-1} - \alpha_m)^{\ell+1} p_{m-1}(x) + \tilde{p}_{m-1}(x)\} e^{(\alpha_{m-1} - \alpha_m)x} \equiv 0. \end{aligned}$$

を得る。ここにおいて各 $\tilde{p}_k(x), k = 1, 2, \dots, m - 1,$ は $\deg \tilde{p}_k < \deg p_k$ となるある多項式である。 $j \neq k$ ならば $\alpha_j - \alpha_m \neq \alpha_k - \alpha_m$ なので、帰納法の仮定により、

$$(\alpha_k - \alpha_m)^{\ell+1} p_k(x) + \tilde{p}_k(x) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, m - 1,$$

である。 $\alpha_k \neq \alpha_m$, かつ $\deg \tilde{p}_k < \deg p_k$ なので, $p_k(x) \equiv 0, k = 1, 2, \dots, m-1$, となる。 よって, (8.30) より $p_m(x) \equiv 0$ となってしまい, $p_m(x) \neq 0$ と仮定したことに反する。 \square

さて定理 3.1 の線形独立性の証明を与える。 次の証明文中では文字・記号等は定理 3.1 のものを流用していることに注意せよ。

定理 3.1 の線形独立性の証明. ある実定数

$$c_{kj}, \quad 1 \leq k \leq r, \quad 0 \leq j \leq m_k - 1;$$

$$a_{kj}, b_{kj}, \quad 1 \leq k \leq s, \quad 0 \leq j \leq m'_k - 1$$

に対して \mathbf{R} 上で

$$\sum_{k=1}^r \left[\left(\sum_{j=0}^{m_k-1} c_{kj} x^j \right) e^{\lambda_k x} \right]$$

$$+ \sum_{k=1}^s \left[\left(\sum_{j=0}^{m'_k-1} a_{kj} x^j \right) e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x \right] + \sum_{k=1}^s \left[\left(\sum_{j=0}^{m'_k-1} b_{kj} x^j \right) e^{\alpha_k x} \sin \beta_k x \right] \equiv 0$$

となるならば実は

$$\text{全ての } k, j \text{ に対して } c_{kj} = 0; \quad a_{kj} = b_{kj} = 0 \quad (8.31)$$

となることを示せばよい。 Euler の公式より

$$\cos \beta_k x = \frac{e^{i\beta_k x} + e^{-i\beta_k x}}{2}, \quad \sin \beta_k x = i \frac{e^{-i\beta_k x} - e^{i\beta_k x}}{2}$$

なので, この恒等式は次に書き換えられる:

$$\sum_{k=1}^r \left[\left(\sum_{j=0}^{m_k-1} c_{kj} x^j \right) e^{\lambda_k x} \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^s \left[\left(\sum_{j=0}^{m'_k-1} (a_{kj} - ib_{kj}) x^j \right) e^{(\alpha_k + i\beta_k)x} + \left(\sum_{j=0}^{m'_k-1} (a_{kj} + ib_{kj}) x^j \right) e^{(\alpha_k - i\beta_k)x} \right] \equiv 0.$$

$\lambda_k, a_{kj} \pm ib_{kj}$ らは全て相異なる複素数なので補題 8.4 により

$$\sum_{j=0}^{m_k-1} c_{kj} x^j \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, r;$$

$$\sum_{j=0}^{m'_k-1} (a_{kj} \pm ib_{kj}) x^j \equiv 0, \quad k = 1, 2, \dots, s.$$

a_{kj}, b_{kj}, c_{kj} が全て実数であることを考えればこれは (8.31) が成立することを意味している。□

章末問題

1. $[a, b]$ 上の連続関数 $y(x)$ が $y(x) \geq 0$ かつ積分不等式

$$y(x) \leq \int_a^x [y(t)]^2 dt, \quad a \leq x \leq b$$

を満たせば $[a, b]$ 上で $y(x) \equiv 0$ であることを示せ。

2. (Gronwall の補題の一般化) $z(x), c(x), g(x)$ は区間 $[x_0, x_1]$ 上の連続関数で、 $[x_0, x_1]$ 上で $c(x), g(x) \geq 0$ とする。積分不等式

$$z(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^x g(t)z(t)dt, \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

が成立すれば $z(x)$ は

$$z(x) \leq c(x) + \int_{x_0}^x c(t)g(t) \exp\left(\int_t^x g(s)ds\right)dt, \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

という評価式を満たすことを示せ。

3. (Bihari の補題) α, c は $0 < \alpha < 1, c \geq 0$ となる定数とする。 $z(x), g(x)$ は区間 $[x_0, x_1]$ 上の連続関数で、 $[x_0, x_1]$ 上で $z(x), g(x) \geq 0$ とする。このとき積分不等式

$$z(x) \leq c + \int_{x_0}^x g(t)z(t)^\alpha dt, \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

が成立すれば $z(x)$ は

$$z(x) \leq \left(c^{1-\alpha} + (1-\alpha) \int_{x_0}^x g(t)dt \right)^{1/(1-\alpha)}, \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

という評価式を満たすことを示せ。

4. (Lipschitz 条件が無くても初期値問題の解が唯一とつになる実例。) $f(x, y)$ を y について非増加な連続関数；つまり条件

$$y_1 \leq y_2 \quad \text{ならば} \quad f(x, y_1) \geq f(x, y_2)$$

を満たす関数とする。そして第3節の初期値問題 (8.6) を考えよう。

(1) $y_1(x), y_2(x)$ をこの初期値問題の2つの解として $v(x) = [y_1(x) - y_2(x)]^2$ とおく。 $v'(x) \leq 0$ を示せ。

(2) この初期値問題の解は唯一とつであることを示せ.

5. (注意 8.1(2) の一般化) α, A を $0 < \alpha < 1, A > 0$, となる定数とするとき初期値問題

$$\begin{cases} y' = Ay^\alpha, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

は $y(x) = Bt^\beta$ (ただし B, β は $B > 0, \beta > 1$ となる定数) の形の解を持つことを示せ. ($y(x) \equiv 0$ もこの初期値問題の解なのでこの初期値問題も解の一意性を満たさない.)

6. α, A を $0 < \alpha < 1, A > 0$ となる定数とするとき関数 $f(y) = Ay^\alpha$ は $0 \leq y \leq K, K > 0$, において Lipschitz 条件を満たさないことを示せ.