6.9　主題の拡張

これまで本章で述べた内容についての拡張を2つ述べるが，深入りはしない．詳細については他著を参考にしてほしい．

6.9.1　連立線型常微分方程式への応用

ラプラス変換は，連立の常微分方程式を解く手段としても有用である．たとえば，次の単純な連立線型常微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y \\ \frac{dy}{dt} &= x \\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0 \end{aligned} \tag{6.73}$$

を考えてみよう．(6.73) にラプラス変換を施せば，

$$s\mathcal{L}[x] - x_0 = -\mathcal{L}[y]$$
$$s\mathcal{L}[y] - y_0 = \mathcal{L}[x]$$

すなわち，

$$s\mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[y] = x_0$$
$$-\mathcal{L}[x] + s\mathcal{L}[y] = y_0$$

を得る．この連立方程式を解けば

$$\mathcal{L}[x] = \frac{s}{s^2+1}x_0 - \frac{1}{s^2+1}y_0$$
$$\mathcal{L}[y] = \frac{1}{s^2+1}x_0 + \frac{s}{s^2+1}y_0$$

であり，これらの原像

$$x(t) = x_0 \cos t - y_0 \sin t$$
$$y(t) = x_0 \sin t + y_0 \cos t$$

は (6.73) の解となる．また，(6.73) に，連続関数 $f(t)$, $g(t)$ が非斉次項として加わった連立常微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = -y + f(t) \\
&\frac{dy}{dt} = x + g(t) \\
&x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0
\end{aligned} \tag{6.74}$$

に対しても，(6.74) にラプラス変換を施して

$$\begin{aligned}
s\mathcal{L}[x] - x_0 &= -\mathcal{L}[y] + \mathcal{L}[f] \\
s\mathcal{L}[y] - y_0 &= \mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[g]
\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
s\mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[y] &= x_0 + \mathcal{L}[f] \\
-\mathcal{L}[x] + s\mathcal{L}[y] &= y_0 + \mathcal{L}[g]
\end{aligned}$$

を得て，この連立方程式を $\mathcal{L}[x]$ と $\mathcal{L}[y]$ について解けば

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x] &= \frac{s}{s^2+1}x_0 - \frac{1}{s^2+1}y_0 + \frac{s}{s^2+1}\mathcal{L}[f] - \frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}[g] \\
\mathcal{L}[y] &= \frac{1}{s^2+1}x_0 + \frac{s}{s^2+1}y_0 + \frac{1}{s^2+1}\mathcal{L}[f] + \frac{s}{s^2+1}\mathcal{L}[g].
\end{aligned}$$

これらの原像

$$\begin{aligned}
x(t) &= x_0 \cos t - y_0 \sin t + \cos t * f(t) - \sin t * g(t) \\
y(t) &= x_0 \sin t + y_0 \cos t + \sin t * f(t) + \cos t * g(t)
\end{aligned}$$

は (6.74) の解となるのである．

(6.73) や (6.74) を含む一般の定数係数の連立線型常微分方程式の場合にも，これと同様な解法を適用すればよいのだが，それを行う前に，初期値問題 (6.74) を解くための議論をベクトルや行列を用いて表示してみよう．単独の定数係数線型常微分方程式に対する解法との対応が見えてくる．

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

と約束すれば，(6.74) は

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

と表すことができる．これをラプラス変換したものが

$$s\begin{pmatrix} \mathcal{L}[x] \\ \mathcal{L}[y] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{L}[x] \\ \mathcal{L}[y] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{L}[f] \\ \mathcal{L}[g] \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{L}[x] \\ \mathcal{L}[y] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{L}[f] \\ \mathcal{L}[g] \end{pmatrix}$$

であり，これを解くと

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathcal{L}[x] \\ \mathcal{L}[y] \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mathcal{L}[f] \\ \mathcal{L}[g] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{s}{s^2+1} & -\dfrac{1}{s^2+1} \\ \dfrac{1}{s^2+1} & \dfrac{s}{s^2+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{s}{s^2+1} & -\dfrac{1}{s^2+1} \\ \dfrac{1}{s^2+1} & \dfrac{s}{s^2+1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathcal{L}[f] \\ \mathcal{L}[g] \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{6.75}$$

を得る．さらに

$$\begin{pmatrix} g_1(t) & g_2(t) \\ g_3(t) & g_4(t) \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(t) * f_1(t) + g_2(t) * f_2(t) \\ g_3(t) * f_1(t) + g_4(t) * f_2(t) \end{pmatrix}$$

と定義すれば，(6.75) の原像は

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix}$$

と求められ，これが (6.74) の解となるということである．

一般の定数係数の 2 元連立線型常微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y + f(t)\\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y + g(t)\\ x(0) &= x_0, \quad y(0) = y_0\end{aligned} \tag{6.76}$$

の解き方をまとめておく．上でのベクトルと行列による表示をさらに一歩進めるために，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = \begin{pmatrix} \mathcal{L}[x] \\ \mathcal{L}[y] \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

とおいて議論しよう．まず (6.76) は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$$

と表すことができる．これをラプラス変換すれば，

$$s\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] - \boldsymbol{x}_0 = A\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] + \mathcal{L}[\boldsymbol{f}(t)]$$

すなわち，

$$(sI - A)\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{x}_0 + \mathcal{L}[\boldsymbol{f}(t)]$$

を得る．$(sI-A)^{-1}$ が存在するとき，

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = (sI - A)^{-1}\boldsymbol{x}_0 + (sI - A)^{-1}\mathcal{L}[\boldsymbol{f}(t)]. \tag{6.77}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}(sI - A)^{-1} &= \frac{1}{det(sI - A)} \begin{pmatrix} s - a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{s^2 - tr(A)s + det(A)} \begin{pmatrix} s - a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{11} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

であり，(6.77) の原像を得るには，この行列の成分ごとに原像を求めることに

なる．つまり，(6.77) の原像は，

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}[\phi_{11}(t)] & \mathcal{L}[\phi_{12}(t)] \\ \\ \mathcal{L}[\phi_{21}(t)] & \mathcal{L}[\phi_{22}(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{s-a_{22}}{s^2-tr(A)s+det(A)} & \dfrac{-a_{12}}{s^2-tr(A)s+det(A)} \\ \dfrac{-a_{21}}{s^2-tr(A)s+det(A)} & \dfrac{s-a_{11}}{s^2-tr(A)s+det(A)} \end{pmatrix}$$

を満たす ϕ_{ij} $(i,j=1,2)$ でつくられる行列

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) \\ \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) \end{pmatrix} \tag{6.78}$$

を用いて

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}_0 + \Phi(t) * \mathcal{L}[\boldsymbol{f}(t)].$$

と求められ，これは (6.76) の解である．なお，(6.78) を導出する際，

$$s^2 - tr(A)s + det(A)$$

の根の様子が本質的に効いてくることは，前節までの話から容易にわかるであろう．

このように，ベクトル・行列表示を利用すれば，連立微分方程式の初期値問題 (6.76) は，単独の定数係数 1 階線型常微分方程式のそれと，形式的には全く同様に取り扱うことができる．また，前節で取り扱った単独高階の微分方程式の初期値問題

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dx}{dt} + a_n x = f(t)$$
$$x(0) = \xi_1,\ \ x'(0) = \xi_2, \cdots,\ \ x^{(n-1)}(0) = \xi_n$$

も，

$$x_1 = x,\ \ x_2 = x', \cdots, x_n = x^{(n-1)}$$

と変換すれば，n 元の連立 1 階線型常微分方程式の初期値問題

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_3 \\
&\ \ \vdots \\
\frac{dx_{n-1}}{dt} &= x_n \\
\frac{dx_n}{dt} &= -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + f(t)
\end{aligned} \tag{6.79}$$

$$x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,\ \cdots,\ x_n(0) = \xi_n$$

に帰着され，ベクトル・行列表示を用いて先の議論と同様に考えることができる．すなわち，

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

とおくと，(6.79) は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \qquad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi}$$

と簡潔に表され，これのラプラス変換から，

$$(sI - A)\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{\xi} + \mathcal{L}[\boldsymbol{f}(t)]$$

を得る．ここで

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = \begin{pmatrix} \mathcal{L}[x_1] \\ \mathcal{L}[x_2] \\ \vdots \\ \mathcal{L}[x_n] \end{pmatrix}$$

である．$(sI-A)^{-1}$ が存在するとき，

$$\mathcal{L}[\boldsymbol{x}] = (sI-A)^{-1}\boldsymbol{\xi} + (sI-A)^{-1}\mathcal{L}[\boldsymbol{f}(t)]. \tag{6.80}$$

が成り立つ．$sI-A$ の余因子行列を $B(s)$ とすると

$$(sI-A)^{-1} = \frac{B(s)}{det(sI-A)}$$

であり，(6.80) の原像を得るには，この $(sI-A)^{-1}$ の成分ごとに原像を求めねばならない．その際，

$$det(sI-A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

の根の様子が本質的に効いてくるのだが，これは前節の特性多項式 $p(s)$ と同じ式である．

(6.76) や (6.79) を一般化した定数係数の連立 1 階線型常微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} =& a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + f_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} =& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} =& a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + f_n(t) \end{aligned}$$

$$x_1(0) = \xi_1,\ x_2(0) = \xi_2,\ \cdots,\ x_n(0) = \xi_n$$

に対しても，ベクトルと行列による表示を用いて，単独の定数係数 1 階線型常微分方程式と形式的には全く同様に取り扱われる．いままでの議論からわかるように，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

と定めて $(sI-A)^{-1}$ の原像を求めることになるが，n が大きくなれば計算は煩雑になる．そこで中心的な役割を果たすのが次の定理である：

ケーリー・ハミルトンの定理

$sI - A$ の行列式を $\lambda(s)$ とし，これを

$$\lambda(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

と表すと，

$$\lambda(A) := A^n + a_1 A^{n-1} + \cdots + a_{n-1}A + a_n I = 0$$

が成立する．

この定理により，$(sI - A)^{-1}$ は，ある s 変数係数をもつ高々 $n-1$ 次の A の多項式で表されることが次のようにして示される．組立て除法を用いれば，

$$\lambda(s) = (s-\alpha)\{s^{n-1} + \lambda_1(\alpha)s^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-2}(\alpha)s + \lambda_{n-1}(\alpha)\} + \lambda(\alpha)$$

すなわち

$$\lambda(s) - \lambda(\alpha) = (s-\alpha)\{s^{n-1} + \lambda_1(\alpha)s^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-2}(\alpha)s + \lambda_{n-1}(\alpha)\} \quad (6.81)$$

が成り立つことは容易にわかる．ここで $\lambda_i(\alpha)$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ は

$$\lambda_i(\alpha) = \alpha\lambda_{i-1}(\alpha) + a_i$$

を満たす．ただし，$\lambda_0(\alpha) = 1$ とする．(6.81) は s, α についての恒等式であるから，s と α を入れ替えた式

$$\lambda(\alpha) - \lambda(s) = (\alpha - s)\{\alpha^{n-1} + \lambda_1(s)\alpha^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-2}(s)\alpha + \lambda_{n-1}(s)\}$$

が成り立ち，さらに，この式において α を A とした行列の式

$$\lambda(A) - \lambda(s)I = (A - sI)\{A^{n-1} + \lambda_1(s)A^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-2}(s)A + \lambda_{n-1}(s)I\}$$

を得る．$\lambda(A) = 0$ であるから，

$$-\lambda(s)I = (A - sI)\{A^{n-1} + \lambda_1(s)A^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-2}(s)A + \lambda_{n-1}(s)I\}$$

となり，$(sI - A)^{-1}$ が存在すれば

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda(s)}\{A^{n-1} + \lambda_1(s)A^{n-2} + \cdots + \lambda_{n-2}(s)A + \lambda_{n-1}(s)\}.$$

となる．よって次の結果を得る．

系

$sI-A$ の行列式を

$$\lambda(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

とすれば，$(sI-A)^{-1}$ が存在するとき

$$(sI-A)^{-1}=\frac{\lambda_0(s)}{\lambda_n(s)}A^{n-1}+\frac{\lambda_1(s)}{\lambda_n(s)}A^{n-2}+\cdots+\frac{\lambda_{n-2}(s)}{\lambda_n(s)}A+\frac{\lambda_{n-1}(s)}{\lambda_n(s)}I \tag{6.82}$$

が成立する．ただし，$\lambda_0(s)=1$ とし，$\lambda_i(s)$ $(i=1,\cdots,n)$ は

$$\lambda_i(s)=s\lambda_{i-1}(s)+a_i$$

を満たし，$\lambda_n(s)=\lambda(s)$ である．

この結果から，$(sI-A)^{-1}$ の原像を得るには，(6.82) の係数ごとに原像を求めればよい．$(sI-A)^{-1}$ の原像を $\Phi(t)$ とすれば，

$$\mathcal{L}[\phi_i(t)]=\frac{\lambda_i(s)}{\lambda(s)}\ \left(=\frac{\lambda_i(s)}{\lambda_n(s)}\right)\quad i=0,\cdots,n-1 \tag{6.83}$$

なる $\phi_i(t)$ を用いて

$$\Phi(t)=\phi_0(t)A^{n-1}+\phi_1(t)A^{n-2}+\cdots+\phi_{n-2}(t)A+\phi_{n-1}(t)I$$

と求められ，$(sI-A)^{-1}$ の原像を求める計算の煩雑さは，A の冪（べき）乗計算と，(6.83) を満たす $\phi_i(t)$ を求める計算とに二分されるわけである．

(6.83) を満たす $\phi_i(t)$ の関数形が $\lambda(s)$ の根の様子で決まることは，前節までの話から容易にわかるであろう．この $\lambda(s)$ は特性多項式と呼ばれ，$\lambda(s)=0$ を特性方程式という．

6.9.2　複素数値関数のラプラス変換

ラプラス変換

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{6.84}$$

において，これまで，$f(t)$ は $[0,\infty]$ の任意の有限区間で積分可能な実数値関数，s は実数として考えてきたが，s は複素数，$f(t)$ としては実変数 t の複素数値関数をも許すものとしよう．すなわち，i を虚数単位とすれば，$s=\sigma+i\omega$ （σ,ω は実数）かつ

$$f(t)=g(t)+ih(t) \tag{6.85}$$

とし，右辺の $g(t)$, $h(t)$ を $[0,\infty]$ の任意の有限区間で積分可能な実数値関数とするのである．σ, ω はそれぞれ s の実部，s の虚部と呼ばれ，$\sigma = \mathrm{Re}s$, $\omega = \mathrm{Im}s$ と表される．同様に，関数 $g(t)$, $h(t)$ についても，それぞれ $f(t)$ の実部，$f(t)$ の虚部と呼ばれ，

$$g(t) = \mathrm{Re}f(t), \qquad h(t) = \mathrm{Im}f(t)$$

である．(6.1) と区別するために，実変数の複素数値関数 $f(t)$ と複素数 s におけるラプラス変換 (6.84) を “複素ラプラス変換” と呼ぶことにしよう．

(6.85) の $f(t)$ に対して，t に関する微分と定積分をそれぞれ

$$f'(t) = \frac{df(t)}{dt} = \frac{dg(t)}{dt} + i\frac{dh(t)}{dt}$$

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b g(t)dt + i\int_a^b h(t)dt$$

と定義すれば，複素数値関数に対しても，以下に記すような，実数値関数の微分と積分に関する公式と同様な公式が導かれることは容易にわかるであろう．無論，$f(t)$ が微分可能とはその実部も虚部も共に微分可能であること意味し，$f(t)$ が積分可能とは，指定された区間においてその実部も虚部も共に積分可能であることを意味する．原始関数に対しても，実数値関数と同様，

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$$

を満たす関数 $F(t)$ を $f(t)$ の原始関数という．

[I] 微分可能な複素数値関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ に対し，

$$(1) \qquad \frac{d\{f_1(t)+f_2(t)\}}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt} + \frac{df_2(t)}{dt}$$

$$(2) \qquad \frac{d\{f_1(t)\cdot f_2(t)\}}{dt} = \frac{df_1(t)}{dt}\cdot f_2(t) + f_1(t)\cdot\frac{df_2(t)}{dt}$$

が成立する．

[II] 微分可能な複素数値関数 $f(t)$ と，微分可能な実数値関数 $\phi(\tau)$ に対し，

$$\frac{df\left(\phi(\tau)\right)}{d\tau} = \left.\frac{df(t)}{dt}\right|_{t=\phi(\tau)} \cdot \frac{d\phi(\tau)}{d\tau}$$

が成立する．

[III] 積分可能な複素数値関数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ に対し，

$$\int_a^b \{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\}\, dt = c_1 \int_a^b f_1(t)dt + c_2 \int_a^b f_2(t)dt$$

が成立する．ただし，c_1, c_2 は複素数.

[IV] 積分可能な複素数値関数 $f(t)$, $g(t)$ に対し，

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = \Big[f(t)g'(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt$$

が成立する.

[V] 積分可能な複素数値関数 $f(t)$ と，微分可能な実数値関数 $\phi(\tau)$ に対し

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{\tau_a}^{\tau_b} f\left(\phi(\tau)\right)\phi'(\tau)d\tau$$

が成立する．ただし，$a = \phi(\tau_a)$, $b = \phi(\tau_b)$.

複素数値関数 $f(t)$ の定積分は，もちろん複素数であるから，その偏角を用いれば

$$\int_a^b f(t)dt = \left|\int_a^b f(t)dt\right| e^{i\theta}$$

と極形式で表すことができる．したがって，

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt$$

が成り立つが，これに公式 [III] と定積分の定義を適用すると

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)dt\right| &= \int_a^b e^{-i\theta} f(t)dt \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta}f(t)\right\}dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\left\{e^{-i\theta}f(t)\right\}dt\end{aligned}$$

を得る．左辺は実数であるから，右辺の第 2 項は 0 である．また，

$$\mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta}f(t)\right\} \le \left|e^{-i\theta}f(t)\right| = \left|e^{-i\theta}\right|\left|f(t)\right| = |f(t)|$$

より，$a < b$ ならば

$$\int_a^b \mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta}f(t)\right\}dt \le \int_a^b |f(t)|\, dt$$

であるから，これらの結果を合わせると

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b \mathrm{Re}\left\{e^{-i\theta}f(t)\right\}dt$$
$$\leq \int_a^b |f(t)|\,dt \quad (a < b)$$

となる．よって次の結果を得る．なお，[VII] は [VI] の系である．

[VI] 積分可能な複素数値関数 $f(t)$ に対し，$a < b$ のとき

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

が成立する．

[VII] 任意の有限区間で積分可能な複素数値関数 $f(t)$ に対し，

$$\int_0^\infty |f(t)|\,dt < \infty \text{ ならば，} \int_0^\infty f(t)dt \text{ は存在する．}$$

以上をふまえると，$f(t)$ を実変数の複素数値関数，s を複素数 $(s = \sigma + i\omega)$ とするときの複素ラプラス変換 (6.84) は，右辺の極限が存在する s の範囲を，実数直線上ではなく，複素数平面の領域で考えねばならない点を除けば，前節までと全く同様な議論ができる．たとえば，定数関数 $f(t) = 1$ のラプラス変換を考えると，

$$\int_0^T e^{-st}dt = \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^T = \frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s}$$

となるのは s が実数の場合と同じだが，$T \to \infty$ のときの右辺の複素数の極限は，

$$\left|\frac{e^{-sT}}{s}\right| \leq \frac{e^{-\sigma T}}{|s|} \to 0 \quad (T \to \infty)$$

が成り立つのが $\mathrm{Re}s = \sigma > 0$ のときであるから，$\mathrm{Re}s > 0$ ならば

$$\int_0^T e^{-st}dt \to \frac{1}{s} \quad (T \to \infty)$$

すなわち

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s} \quad (\mathrm{Re}s > 0) \tag{6.86}$$

となる，といった具合である．また，実変数の複素数値関数 $f(t)$, $g(t)$ に対しても，線型性

$$\mathcal{L}[af + bg] = a\mathcal{L}[f] + b\mathcal{L}[g] \qquad (a,\, b \text{ は複素数}) \tag{6.87}$$

や，合成積に関する性質

$$\mathcal{L}[f*g]=\mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g] \tag{6.88}$$

が同様に成立するが，(6.88) は自明とはいえないので証明しておこう．$f(t)$, $g(t)$ が実数値関数のとき，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f*g]&=\int_0^\infty (f*g)e^{-st}dt\\&=\int_0^\infty (f*g)e^{-\sigma t}\cos\omega t dt-i\int_0^\infty (f*g)e^{-\sigma t}\sin\omega t dt\\&=\int_0^\infty \left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\}e^{-\sigma t}\cos\omega t dt\\&\qquad -i\int_0^\infty \left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\}e^{-\sigma t}\sin\omega t dt\end{aligned} \tag{6.89}$$

であるが，最後の式の実部と虚部において共に積分順序を交換すると，

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\}e^{-\sigma t}\cos\omega t dt\\&\qquad=\int_0^\infty \left\{\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-\sigma t}\cos\omega t dt\right\}g(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\}e^{-\sigma t}\sin\omega t dt\\&\qquad=\int_0^\infty \left\{\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-\sigma t}\sin\omega t dt\right\}g(\tau)d\tau,\end{aligned}$$

となるから，これらを (6.89) に代入して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f*g]&=\int_0^\infty \left\{\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-\sigma t}\cos\omega t dt\right\}g(\tau)d\tau\\&\qquad -i\int_0^\infty \left\{\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-\sigma t}\sin\omega t dt\right\}g(\tau)d\tau\\&=\int_0^\infty \left\{\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-\sigma t}(\cos\omega t-i\sin\omega t)dt\right\}g(\tau)d\tau\\&=\int_0^\infty \left\{\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt\right\}g(\tau)d\tau\end{aligned}$$

を得る．さらに，$v=t-\tau$ によって積分変数を t から v に変えると

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left\{\int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-st}dt\right\}g(\tau)d\tau&=\int_0^\infty \left\{\int_0^\infty f(v)e^{-sv}dv\right\}g(\tau)e^{-s\tau}d\tau\\&=\mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g]\end{aligned}$$

となり，

$$\mathcal{L}[f*g]=\mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g] \qquad (f(t),\, g(t) \text{ は実数値関数}) \tag{6.90}$$

が証明できた．$f(t)$, $g(t)$ が複素数値関数のときは，

$$\begin{aligned} f*g &= (\mathrm{Re}f+i\mathrm{Im}f)*(\mathrm{Re}g+i\mathrm{Im}g) \\ &= \mathrm{Re}f*\mathrm{Re}g-\mathrm{Im}f*\mathrm{Re}g+i\,(\mathrm{Re}f*\mathrm{Im}g+\mathrm{Im}f*\mathrm{Re}g) \end{aligned}$$

であるから，(6.87) と (6.90) を用いれば

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f*g] &= \mathcal{L}\,[\mathrm{Re}f*\mathrm{Re}g]-\mathcal{L}\,[\mathrm{Im}f*\mathrm{Re}g]+i\,(\mathcal{L}\,[\mathrm{Re}f*\mathrm{Im}g]+\mathcal{L}\,[\mathrm{Im}f*\mathrm{Re}g]) \\ &= \mathcal{L}\,[\mathrm{Re}f]\cdot\mathcal{L}\,[\mathrm{Re}g]-\mathcal{L}\,[\mathrm{Im}f]\cdot\mathcal{L}\,[\mathrm{Re}g] \\ &\qquad\qquad +i\,(\mathcal{L}\,[\mathrm{Re}f]\cdot\mathcal{L}\,[\mathrm{Im}g]+\mathcal{L}\,[\mathrm{Im}f]\cdot\mathcal{L}\,[\mathrm{Re}g]) \\ &= (\mathcal{L}\,[\mathrm{Re}f]+i\mathcal{L}\,[\mathrm{Im}f])\cdot(\mathcal{L}\,[\mathrm{Re}g]+i\mathcal{L}\,[\mathrm{Im}g]) \\ &= \mathcal{L}[f]\cdot\mathcal{L}[g] \end{aligned}$$

を得る．よって (6.88) が示される．

(6.3) と (6.86) を比較してほしい．s の意味と s の範囲が異なる（それぞれ $s>0$, $\mathrm{Re}s>0$）だけで，両者は全く同じ式である．複素ラプラス変換 (6.84) に関しても，前節までと同様，(6.86), (6.87), および (6.88) からあらゆる公式が導かれるのであるが，その結果，(6.3) と (6.86) のような対応がより一般に成立することになる．つまり，複素定数 α, 実変数 t, 複素数値関数 $f(t)$ に対して

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}[e^{\alpha t}]=\frac{1}{s-\alpha} \quad (\mathrm{Re}s>\mathrm{Re}\alpha), \\ &\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right]=\frac{1}{s^n} \quad (\mathrm{Re}s>0), \\ &\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right]=\frac{1}{s}\mathcal{L}[f] \quad (\mathrm{Re}s>0), \\ &\mathcal{L}\,[f']=s\mathcal{L}[f]-f(0) \quad (\mathrm{Re}s>0), \\ &\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right]=s^n\mathcal{L}[f]-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0) \quad (\mathrm{Re}s>0), \\ &\mathcal{L}\left[\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}\right]=\frac{1}{(s-\alpha)^n} \quad (\mathrm{Re}s>\mathrm{Re}\alpha) \end{aligned} \tag{6.91}$$

が，さらには，実定数 β に対して

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\sin\beta t\right] &= \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \quad (\mathrm{Re}s > 0), \\
\mathcal{L}\left[\cos\beta t\right] &= \frac{s}{s^2+\beta^2} \quad (\mathrm{Re}s > 0), \\
\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\sin\beta t\right] &= \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \quad (\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}\alpha), \\
\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\cos\beta t\right] &= \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \quad (\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}\alpha)
\end{aligned}
\tag{6.92}
$$

が成り立つのである．4 節の第一移動定理についても例外ではない．

第一移動定理（複素ラプラス変換版）

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ $(\mathrm{Re}s > 0)$ ならば，　$\mathcal{L}[f(t)e^{\alpha t}] = F(s-\alpha)$ $(\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}\alpha)$
である．

(6.92) の 4 つの公式は，上 2 段が，(6.91) の下から 2 段目の公式と (6.86) の合わせ技で導かれ，下 2 段はそれに第一移動定理（複素ラプラス変換版）を施すことで得られるのだが，(6.91) の最上段の公式を利用して次のようにも示される．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{(\alpha+i\beta)t}] &= \frac{1}{s-(\alpha+i\beta)} \quad (\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}\alpha) \\
\mathcal{L}[e^{(\alpha-i\beta)t}] &= \frac{1}{s-(\alpha-i\beta)} \quad (\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}\alpha)
\end{aligned}
$$

であるから，オイラーの公式と線型性 (6.87) により，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{\alpha t}\cos\beta t] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s-(\alpha+i\beta)} + \frac{1}{s-(\alpha-i\beta)}\right\} \\
&= \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \quad (\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}\alpha),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{\alpha t}\sin\beta t] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i}\right] \\
&= \frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{s-(\alpha+i\beta)} - \frac{1}{s-(\alpha-i\beta)}\right\} \\
&= \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \quad (\mathrm{Re}s > \mathrm{Re}\alpha)
\end{aligned}
$$

を得る．

さて，任意の有限区間で積分可能な複素数値関数 $f(t)$ に対し，$\mathcal{L}[f(t)]$ が存在するための十分条件について述べておく．その一つとして，十分大きい t において

$$|f(t)| \leq Me^{ct}$$

となるような実数 c と $M > 0$ が存在することが知られている．このとき $f(t)$ を指数位の関数という．実際，$f(t)$ が指数位の関数ならば，ある実数 c で

$$\left|f(t)e^{-st}\right| \leq |f(t)|\, e^{-\sigma t} \leq Me^{(c-\sigma)t}$$

となるから，$\mathrm{Re} s = \sigma > c$ のとき，

$$\int_0^\infty e^{-(\sigma-\alpha)t} dt = \frac{1}{\sigma - \alpha} < \infty$$

であり，複素数値関数の積分の性質 [VII] から，$\mathcal{L}[f(t)]$ の存在が保証されるのである．$f(t)$ が指数位の関数ならば，$\mathrm{Re} f(t)$ も $\mathrm{Im} f(t)$ も指数位の関数となることは容易にわかるであろう．また，α を複素数とするとき，$t^n e^{\alpha t}$ が任意の n に対して指数位の関数であることは，

$$e^x > \frac{x^n}{n!} \qquad (x > 0)$$

という事実を利用すれば，$\beta > \mathrm{Re}\alpha$ なる β と $t > 0$ に対して

$$e^{(\beta - \mathrm{Re}\alpha)t} > \frac{\{(\beta - \mathrm{Re}\alpha)t\}^n}{n!}$$

すなわち

$$\left|t^n e^{\alpha t}\right| = t^n e^{\mathrm{Re}\alpha} < \frac{n!}{(\beta - \mathrm{Re}\alpha)^n} e^{\beta t}$$

が成り立つことからわかる．

複素ラプラス変換 (6.84) の微分方程式への応用では，複素定数を係数に持つ線型常微分方程式にその射程を拡げつつも，実定数の線型常微分方程式の場合と同様な解法が成立する．たとえば，a, z_0 を複素数とするとき，1 階の複素係数線型常微分方程式

$$\frac{dz}{dt} + az = 0, \qquad z(0) = z_0$$

を満たす複素数値解 $z(t)$ を求めるには，与式をラプラス変換して

$$s\mathcal{L}[z] - z_0 + a\mathcal{L}[z] = 0$$

すなわち

$$(s + a)\mathcal{L}[z] = z_0$$

となるから，これが $\mathcal{L}[z]$ について解けるとき

$$\mathcal{L}[z] = \frac{z_0}{s+a}$$

を得て，この原像 $z(t) = z_0 e^{-at}$ が所望する解である．といった具合で，手順は (6.18) の場合と全く同じ．一般に，a_i, ξ_i $(i = 1, \cdots n)$ を複素数，$f(t)$ を連続な複素数値関数[2] とした n 階線型常微分方程式の初期値問題

$$\begin{gathered}\frac{d^n z}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} z}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dz}{dt} + a_n z = f(t) \\ z(0) = \xi_1,\ z'(0) = \xi_2, \cdots,\ z^{(n-1)}(0) = \xi_n\end{gathered} \tag{6.93}$$

に対しても，これを満たす複素数値解 $z(t)$ を求めるには，実定数の線型常微分方程式の解法，すなわち，8 節で述べた手順：（作業１）→（作業２）→（結論）と全く同様でよい．ただし，

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ a_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$$

なる b_i $(i = 1, \cdots, n)$ は複素数であり，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\phi(t)\right] &= \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \cdots + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \\ \mathcal{L}\left[g(t)\right] &= \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}\end{aligned} \tag{6.94}$$

を満たす $\phi(t)$, $g(t)$ を求める際に用いる部分分数分解定理は，複素数の範囲に拡張したものとなる：

[2] 複素数値関数が連続であるとは，その実部と虚部が共に連続であるときをいう．

部分分数分解定理（複素係数多項式版）

$$f(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

を複素係数の多項式とし，$R(s)$ を，$f(s)$ を分母にもち，分子の次数が $f(s)$ の次数より低い分数式（有理関数）とする．代数学の基本定理により，$f(s)$ は 1 次式の積に因数分解できるから，それを

$$f(s) = \prod_{i=1}^{\mu} (s-\gamma_i)^{l_i}, \qquad \sum_{i=1}^{\mu} l_i = n$$

とすれば，$R(s)$ は適当な複素定数 $A_{i1}, \cdots, A_{il_i}$ $(i = 1, 2, \cdots, \mu)$ を用いて

$$R(s) = \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \frac{A_{i1}}{s-\gamma_i} + \frac{A_{i2}}{(s-\gamma_i)^2} + \cdots + \frac{A_{il_i}}{(s-\gamma_i)^{l_i}} \right\}$$

と一意に展開できる．

この定理から，(6.94) は，分母が

$$p(s) := s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n = \prod_{i=1}^{\mu} (s-\gamma_i)^{l_i} \tag{6.95}$$

のように因数分解され, それぞれ適当な複素定数 $A_{i1}, \cdots, A_{il_i}$ および $\tilde{A}_{i1}, \cdots, \tilde{A}_{il_i}$ を用いて

$$\mathcal{L}[\phi(t)] = \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \frac{A_{i1}}{s-\gamma_i} + \frac{A_{i2}}{(s-\gamma_i)^2} + \cdots + \frac{A_{il_i}}{(s-\gamma_i)^{l_i}} \right\}$$

$$\mathcal{L}[g(t)] = \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \frac{\tilde{A}_{i1}}{s-\gamma_i} + \frac{\tilde{A}_{i2}}{(s-\gamma_i)^2} + \cdots + \frac{\tilde{A}_{il_i}}{(s-\gamma_i)^{l_i}} \right\}$$

と一意に展開できる．したがって，(6.94) を満たす $\phi(t)$, $g(t)$ は，ラプラス変換の線型性により，

$$\mathcal{L}[\phi_{il}(t)] = \frac{1}{(s-\gamma_i)^l}$$

なる $\phi_{il}(t)$ を用いて

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ A_{i1}\phi_{i1}(t) + A_{i2}\phi_{i2}(t) + \cdots + A_{il_i}\phi_{il_i}(t) \right\} \\ g(t) &= \sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \tilde{A}_{i1}\phi_{i1}(t) + \tilde{A}_{i2}\phi_{i2}(t) + \cdots + \tilde{A}_{il_i}\phi_{il_i}(t) \right\} \end{aligned} \tag{6.96}$$

と表されるのであるが，(6.91) の最下段の公式から，

$$\phi_{il}(t) = \frac{t^{l-1}}{(l-1)!}e^{\gamma_i t} \qquad i = 1, \cdots, \mu, \quad l = 1, \cdots, l_i. \tag{6.97}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned} z(t) = &\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ A_{i1} + A_{i2}t + \cdots + A_{il_i}\frac{t^{l_i-1}}{(l_i-1)!} \right\} e^{\gamma_i t} \\ &+ \left[\sum_{i=1}^{\mu} \left\{ \tilde{A}_{i1} + \tilde{A}_{i2}t + \cdots + \tilde{A}_{il_i}\frac{t^{l_i-1}}{(l_i-1)!} \right\} e^{\gamma_i t} \right] * f(t) \end{aligned}$$

が (6.93) の解である．実定数係数の線型常微分方程式の場合と同様，(6.95) の $p(s)$ は特性多項式と呼ばれ，$p(s) = 0$ は特性方程式という．

このように，複素定数係数の線型常微分方程式に対する応用では，係数の範囲を複素数に拡げてスリムになった部分分数分解定理（複素係数多項式版）のおかげで，実定数係数の線型常微分方程式の場合と比べ，解を求める作業は圧倒的に楽になる．その解法の正しさの証明も，(6.97) の $\phi_{il}(t)$ とこれらの一次結合 (6.96) の $g(t)$ に対し，

$$\begin{aligned} p(D)\phi_{il}(t) &= 0 \\ p(D)\left\{g(t) * f(t)\right\} &= 0 \end{aligned}$$

の両式のみを示せばよいため非常に手軽い（これらは初期値問題 (6.53) の場合と全く同様に証明できる）．

複素ラプラス変換 (6.84) の応用対象を，実定数係数の線型常微分方程式の初期値問題 (6.53) に狭めてみよう．「実定数係数の線型微分方程式を実数値解の範囲で解くならば，ラプラス変換を (6.1) のように定義して差し支えない」と 1 節の冒頭で述べたが，同じ目的に複素ラプラス変換 (6.84) を利用した場合と比べると，複素ラプラス変換 (6.84) のほうがはるかに簡便なことがわかるであろう．ラプラス変換 (6.1) の $f(t)$ の値域と s を複素数の範囲に拡張する甲斐は，この点にある．しかしながら，その分，複素数値解から実数値解を抽出するための理論武装が必要なのであるが，これに関しては前章までのどこかで習得されたし．